

Mathematik der Natur - Logik und Kommunikation

Kristallmann Philipp

April 23, 2023

Abstrakt

Wenn ich mir den Umgang mit der verbreiteten Informationen in Medien und sozialen Plattformen anschau, insbesondere aber auch den Umgang mit den Verkündern dieser Informationen, so stelle ich ein Defizit in unserer Gesellschaft fest. Das ist eine Lücke in Kommunikation und Empathie. Diese kommt daher, dass wir nicht beigebracht bekommen haben, wie wir richtig und klug miteinander umgehen. Viele stellen Behauptungen auf, viele greifen diese auf, andere wiederum kritisieren diese dafür und behaupten das Gegenteil. Jeder meint Stellung beziehen zu müssen. Entweder man ist komplett dafür oder komplett dagegen. Dritte stellen sich über einen anderen hin und meinen diesen diffamieren zu dürfen. Es herrscht insgesamt ein Durcheinander in unserer Gesellschaft, welches die dabei entstehenden Emotionen noch befeuern. Mit diesem Abschnitt möchte ich einen Teil dazu beitragen, wieder eine konstruktive Kommunikationskultur in unserer Gesellschaft zu leben. Selbstverständlich gibt es bereits gute Modelle wie beispielsweise die gewaltfreie Kommunikation¹. Aber damit möchte ich mich nicht begnügen, sondern eine mathematische Perspektive zu diesem Thema eröffnen. Meine Ausführungen können nicht vollständig sein, sondern dienen vielmehr als Grundstein oder Impuls für weitere Überlegungen zu diesem Thema. Wie einst Newton sagte: "Wenn ich weiter sehen konnte, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stand."². So baue auch ich meine Gedanken auf "Riesen" und versuche damit zu einem Fortschritt

¹Hierzu sei beispielsweise das Buch "Sei nicht nett, sei echt! Ein Handbuch für gewaltfreie Kommunikation" von Kelly Bryson empfohlen.

²Vergleiche hierzu folgende Internetquelle: <https://www.citavi.com/de/nuetzliche-irrtuemer/artikel/auf-den-schultern-von-riesen> .

beizutragen. Zumindest soll aber damit in der Gesellschaft ein tiefergehendes Bewusstsein für konstruktivere Kommunikation geschaffen werden.

Grundlegende logische und Mengenoperationen

In diesem Abschnitt stelle ich eine kleine Zusammenfassung der wesentlichen aussagenlogischen und mengentheoretischen Resultate zusammen. Diese brauchen wir dann später bei der Anwendung realer Beziehungen³. Insgesamt gibt es 4 grundlegende logische Operatoren, welche nur eine Aussage betreffen. 16 existieren, die sich auf ein Aussagenpaar (üblicherweise abstrakt mit A und B bezeichnet) beziehen⁴.

Hier fasse ich nur die wichtigsten und für uns relevanten Aussageverknüpfungen zusammen. Es reichen nämlich die herkömmlichen Operationen "Und" "Oder" und "Nicht" aus, um damit alle restlichen weiteren Logik-Operatoren abbilden zu können.

Daneben möchte ich noch die Implikation und das "Exklusive Oder" (engl. auch XOR geschrieben für "xklusive **or**") beschreiben. Diese sind nicht nur in der Allgemeinheit bekannt, sondern haben auch einen realen Bezug. Insbesondere das "Exklusive Oder" sorgt häufig zusammen mit dem herkömmlichen Oder für Verwirrung. Diese zu trennen ist im Allgemeinen sehr wichtig, weil sich oft hinter dem Oder mehrere verschiedene Interpretationen verbergen. Im Sprachgebrauch kann das Oder auch als Und aufgefasst werden. Das möchte ich in den nachfolgenden Zeilen klären.

"Und" - Operator und (Durch)schnitt

Der "Und"-Operator ist in Tabelle 1 dargestellt. Das ergibt intuitiv Sinn: Eine durch "Und" verknüpfte Aussage (das entsprechende Symbol ist \wedge) ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen A und B richtig sind. Falls mindestens eine Behauptung A oder B falsch ist, so ist auch die logische Verknüpfung unwahr.

³In diesem Abschnitt sind Beziehungen jeglicher Art, also neben den oft mit diesem Begriff belegten Liebesbeziehungen beispielsweise auch geschäftliche, familiäre, freundschaftliche Beziehungen und so weiter. Allgemein ist damit eine beliebige Interaktion zwischen Menschen gemeint

⁴Aus elementaren kombinatorischen Überlegungen geht hervor, dass bei beispielsweise 3 Aussagen insgesamt $2^{2^3} = 2^8 = 256$ mögliche Operatoren existieren. Bei einer beliebigen Anzahl von n Aussagen gibt es demnach nach der Formel 2^{2^n} solcher Logik-Operatoren.

Aussage A	Aussage B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Tabelle 1: Tabelle: Wahrheitstabelle für die "Und"-Operation

Aussage A	Aussage B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tabelle 2: Wahrheitstabelle für die "Oder"-Operation

"Oder" - Operator und Vereinigung

Der "Oder"-Operator ist in Tabelle 2 zu finden. Bei dem "Oder" verhält es sich ähnlich: Die Verknüpfung ist genau dann korrekt, wenn mindestens eine der beiden Aussagen richtig ist. Nur wenn sowohl A als auch B falsch sind, so ergibt das eine falsche Aussage.

"Exklusives Oder" - Operator und Symmetrische Differenz

In Tabelle 3 ist der "Exklusives Oder" - Operator dargestellt. Der Unterschied zum ursprünglichen "Oder" besteht darin, dass es nur dann wahr ist, wenn nur genau eine der beiden Aussagen A oder B, nicht beide oder keine, wahr sind. Beim "Oder" ist zusätzlich noch die Aussage korrekt, wenn beide Aussagen gleichzeitig richtig sind.

Aussage A	Aussage B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tabelle 3: Wahrheitstabelle für die "Exklusives Oder"-Operation

Aussage A	\bar{A}
w	f
f	w

Tabelle 4: Wahrheitstabelle für die "Nicht"-Operation

Aussage A	Aussage B	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Tabelle 5: Wahrheitstabelle für die "Implikation"-Operation

"Nicht" - Operator und Komplement

Der "Nicht"-Operator ist in Tabelle 4 abgebildet. Im Gegensatz zu anderen in diesem Abschnitt vorgestellten Aussagen bezieht sich dieser Operator nur auf eine Aussage. Es dreht einfach den Wahrheitsgehalt um, das heißt: Aus wahren Aussagen entsteht eine falsche und umgekehrt.

"Implikation" - Operator und Inklusion/Exklusion

Der "Implikation"-Operator ist in Tabelle 5 zu sehen. In der Aussagenlogik gibt es die wesentliche Aussage: "Aus Falschem folgt Beliebigen". Das ist bemerkenswert im wahrsten Sinne des Wortes. Wenn die Ausgangsaussage A (man könnte hier auch von der Annahme sprechen) falsch ist, dann sei egal was daraus folgt; die Implikation ist immer korrekt. Das ist die wesentliche Kraft hinter beliebigen fiktiven Strukturen. Sie schafft sozusagen wahre Tatsachen "aus dem Nichts".

Wenn beide Aussagen wahr sind, so ist selbstverständlich auch die Schlussfolgerung wahr. Falls die implizierte Aussage B falsch, während A richtig ist, so ist die gesamte Aussage falsch.

Anders als in den vorigen Tabellen habe ich hier noch die zur Implikation äquivalente Aussage hinzugefügt, die da lautet: "Nicht A oder B". Jeder kann sich durch eigenes Nachrechnen davon überzeugen, das es tatsächlich das selbe ist⁵. Damit wird ersichtlich, dass die Implikation aus den logischen Grundbausteinen "Und", "Oder" und "Nicht" zusammengesetzt wer-

⁵Siehe dazu Fragestellung 2.

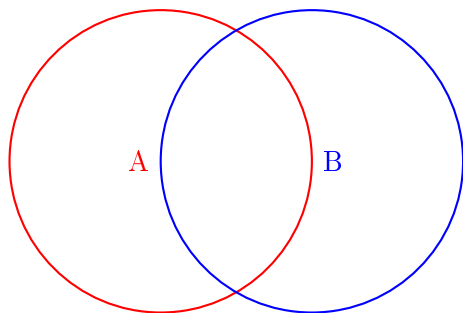


Abbildung 1: Beispiel für ein Venn-Diagramm mit zwei Mengen

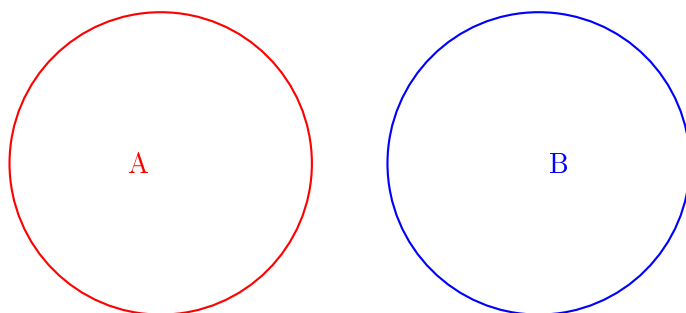


Abbildung 2: Beispiel für disjunkte Mengen

den kann.

Venn-Diagramme

In der Mathematik gibt es ein nützliches Tool, welches ermöglicht, Mengen und deren Beziehungen zueinander graphisch anschaulich darzustellen, nämlich das Venn-Diagramm. Wie bereits ersichtlich, ist hier eine Verbindung zwischen der praktisch menschlichen Ebene und der logisch abstrakten Ebene erkennbar. Daher eignet sich die Mengenlehre als Instrument zur Betrachtung von Beziehungsformen hervorragend.

In Abbildung 1 ein Beispiel für die Darstellung von Mengen in einem Venn-Diagramm dargestellt.

Hierbei stellt A die rote Menge und B die blaue Menge dar. Wie deutlich zu sehen, überlappen sich beide Mengen. Es kann auch sein, dass zwei Mengen keinen gemeinsamen Schnitt haben, wie in Abbildung 2 ersichtlich.

In solchen Fällen spricht man von disjunkten Mengen. Das bedeutet, der gemeinsame Schnitt ist leer.

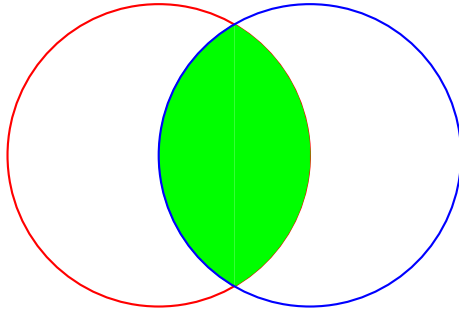


Abbildung 3: Beispiel für ein Venn-Diagramm mit Schnittmengen

Anwendung auf unterschiedliche Beziehungsformen

Im folgenden Abschnitt möchte ich die oben erläuterte trockene Theorie der Logik und Mengenlehre auf reale und konkrete Beziehungstypen übertragen. Daraus lassen sich wichtige Erkenntnisse gewinnen im echten Leben, Fallstricke in Streitigkeiten erkennen und hoffentlich auch vermeiden.

Hierbei stellt eine Menge die Gesamtheit der Informationen und Glaubenssätze des Individuums hinsichtlich eines bestimmten Bereiches oder insgesamt dar. Wenn nun zwei Individuen aufeinander treffen, so haben diese hinsichtlich eines Themenbereiches bestimmte Übereinstimmungen, aber auch Differenzen. Das Venn-Diagramm ist hier eine nützliche Veranschaulichung dieses Themas. Das Verhältnis der beiden resultierenden Mengen zueinander ergibt deren Übereinstimmung.

Durchschnitt - Tunnelblick und Verliebtsein

Der Durchschnitt beschreibt die Schnittmenge zwischen den beiden Informationsmengen. Die dazugehörige logische Operation ist das "Und". Wenn wir diesen auf die Menge übertragen, so nehmen wir nur die Elemente, welche in der Menge A **und** B (hier fließt die Logik ein) enthalten sind. Das ist in Abbildung 3 zu sehen. Wenn nun beide Individuen auf deren Schnitt fokussiert sind, so ergibt sich folgende Situation: Beide kommen auf einen gemeinsamen Nenner, weil diese in ihrer Denkweise übereinstimmen und sozusagen nur ihre Gemeinsamkeiten sehen. Das ist allerdings von kurzer Dauer, weil beide Parteien Differenzen aufweisen, welche im Zuge der Zusammenseins aufkommen. Dadurch sind Konflikte für die Zukunft vorprogrammiert. Lösbar wäre das, indem mindestens eine der Parteien Eingeständnisse in ihrer Differenz macht.

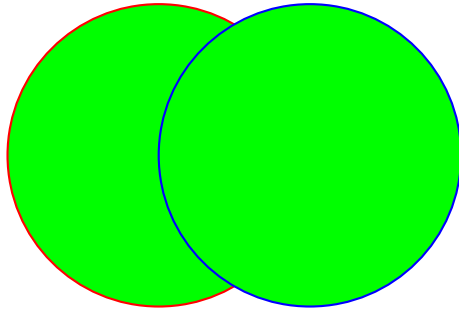


Abbildung 4: Beispiel für ein Venn-Diagramm mit Vereinigung

Entweder, beide Mengen verschmelzen zu einer Gesamtmenge ohne Differenzen. Das ist gut sichtbar bei Ehepartnern, welche längere Zeit zusammen sind. Sie übernehmen bzw. spiegeln den anderen Partner wider. Über deren Unstimmigkeiten haben diese sich in einem langwierigen Prozess hinweggesetzt.

Oder, beide Parteien gehen aufgrund der Meinungsverschiedenheiten auseinander. Das ist in heutiger Gesellschaft häufiger anzutreffen. Grund war mindestens eine Unstimmigkeit⁶ in einem Aspekt.

Vereinigung - Freundschaft auf Armeslänge

Die Vereinigung beschreibt den Zusammenschluss beider Mengen unter eine gemeinsame Menge. Diesen Umstand zeigt Abbildung 4. Wie wir sehen können, ist die gesamte Fläche unter beiden Kreisen grün. Diesen Typ habe ich Freundschaft auf Armeslänge genannt. Grund hierfür ist, dass wir hier nicht nur die eigenen sondern auch die Aspekte des Gegenübers berücksichtigen. Wir könnten hier auch von Empathie sprechen. Das ist auf Armeslänge in der Hinsicht, dass wir zwar die Meinung des anderen akzeptieren, aber uns nicht sofort von ihr vereinnahmen lassen, weder im positiven noch im negativen Sinne. Das ist der am schwierigsten aufrecht zu erhaltende Typ. Es erfordert zum einen, auf die Denkweise und die Glaubenssätze des Gegenüber zu berücksichtigen, zum anderen ist es aber auch wichtig, sich nicht von den fremden Konzepten beeinflussen zu lassen.

Diese Art von Freundschaft erfordert das meiste Bewusstsein. Wenn alle Menschen so denken und miteinander umgehen würden im alltäglichen Leben, dann kämen viele zwischenmenschliche Konflikte gar nicht erst auf.

⁶Im Sprachgebrauch sagt man hierzu auch passend Differenz.

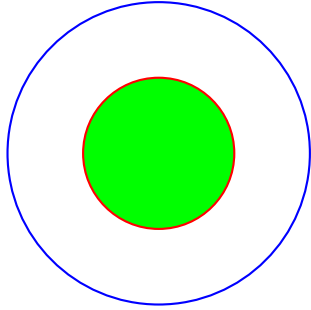


Abbildung 5: Beispiel für ein Venn-Diagramm mit Inklusion

Inklusion - Schüler und Lehrer

Die Inklusion bedeutet, dass einer der beiden hinsichtlich eines Aspektes⁷ echt weniger weiß als der andere gegenüber. Der dazugehörige logische Operator ist die Implikation. Der innere Mengenkreis **impliziert** den äußeren Kreis, weil dieser darin enthalten ist. Aus dem inneren Bereich können wir sicher folgern, dass wir auch im äußeren Kreis sind. Umgekehrt bedeutet ein Element im großen Kreis nicht zwangsläufig, dass dieser im inneren Kreis enthalten ist. Betrachte dazu Abbildung 5. Der grün-rote Kreis stellt hier den Schüler, und der äußere blaue Kreis den Lehrer dar. Das ist dahingehend eine relativ stabile Beziehung, weil die Rollen beider Seiten klar sind. Es führt dazu, dass der Schüler immer mehr Erkenntnis gewinnt, man könnte sagen die grüne Menge wächst immer weiter Richtung blauem Kreis. Besonders ist auch, dass dieses Verhältnis solange stabil ist wie diese Inklusion herrscht. Sobald der Schüler mindestens eine eigene Entdeckung macht und somit aus der blauen Menge hinausragt, wechselt das Verhältnis in eine der obigen Formen, also entweder wird daraus ein "intimes" (im Sinne von tiefgehend freundschaftlich) oder freundschaftliches, auf Armeslänge basierendes Verhältnis.

Symmetrische Differenz - Verfeindete Parteien

Das Gegenteil zu obigen Situationen tritt ein, wenn zwei Individuen auf die Mängel des anderen, also die Unstimmigkeiten schauen. Die logische Entsprechung ist das "Entweder Oder". Also entweder gilt das eine, oder genau das andere. Die Übereinkunft beider Parteien, also der Schnitt, gehört

⁷Wie eingangs erwähnt, können wir hier die Mengen eingrenzen hinsichtlich eines Themas oder eines Themenkomplexes, oder aber wir können die Summe aller Informationen und Glaubenssätze zusammen in dieser Menge betrachten.

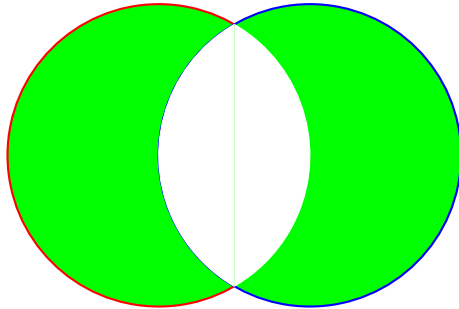


Abbildung 6: Beispiel für ein Venn-Diagramm mit Symmetrischer Differenz

nicht zu der Menge der symmetrischen Differenz. Die entsprechende mengentheoretische Situation ist in Abbildung 6 zu sehen. Wie zu sehen, ist in diesem Fall genau die Schnittmenge frei, und die Differenzen (also $A - B$ und $B - A$) sind markiert. Das bedeutet, die beiden informativen Wolken haben keinen gemeinsamen Nenner, sondern unterscheiden sich diametral in ihren Inhalten. Man könnte auch davon reden, dass es darum geht, möglichst die Differenzen zwischen den Parteien herauszustellen. Es handelt sich demnach um eine komplette Meinungsverschiedenheit zwischen den beiden. Das äußert sich typischerweise in Auseinandersetzungen bis hin zu kriegerischen Konflikten. Die Fronten sind derart verhärtet, dass es keine gemeinsamen Ansatzpunkte mehr gibt. Das ist eine der anspruchsvollsten Beziehungstypen. Ideen der gewaltfreien Kommunikation könnten hier angewendet werden. Wirkungspunkt wäre hier beispielsweise die Schnittmenge.

Fazit

Heutzutage ist es wichtiger denn je, sich mit den umgebenden Informationen und dem Botschafter auseinanderzusetzen.

Viele machen den Fehler und tendieren zu schnell in eine der möglichen Extrema: Entweder der Informant ist ein "Engel" und alles was er sagt ist richtig und gut; oder er ist böse und alles was er vorher gesagt hat und nachher sagt ist falsch und irreführend. Diese Haltung führt langfristig zu Konflikten und Verfeindungen.

Die beste mögliche Position, welche man einnehmen kann, ist die Haltung der (freundschaftlichen) Armeslänge. Dem entspricht die mengentheoretische Vereinigung, wie oben geschildert.

Nehme dabei eine möglichst emotional neutrale Sichtweise dem Gegenüber

ein. Finde die Punkte, mit denen du übereinstimmst, und jene, mit denen du nicht einverstanden bist. Versuche daraus sowohl im Monolog mit dir deine eigenen Glaubenssätze auf den Prüfstand zu stellen, als auch im Dialog mit dem anderen seine Glaubenssätze zu prüfen. Die größte Gefahr besteht darin, dass das Gegenüber falsche Glaubensmuster einem "überstülpt". Um das zu verhindern, ist ein genaues und aufmerksames Überprüfen der informativen Prozesse notwendig.

In diesem Kontext spielen auch Eggregoren und Aggregatoren eine wichtige Rolle. Eggregoren sind feinstoffliche Strukturen auf kollektiver Ebene, welche von den Menschen, die diese Eggregoren für sich zulassen, Energie abziehen. Es gibt also einen (eventuell feinstofflichen) "Diktator", der von den Massen die Energie, gegebenenfalls auch durch Aufmerksamkeit, abzapft und das für seine Steuerung der Massen nutzt. Daraus erhält dieser die Kontrolle, während den Unterstützern des Eggregors "Brotkrümel" zufallen. Es ist ein egozentrische Prinzip und dient dazu, Kontrolle auf die Menschen auszuüben. Das Resultat ist im Extremfall eine stark hierarchische Ordnung.

Dagegen Aggregatoren sind das genaue Gegenteil von Eggregoren. Diese entstehen aus Individuen, welche jeder für sich Energie ausstrahlt. Das können beispielsweise feinstoffliche Energien durch Gebete und Segnungen, aber auch grobstofflichere durch die Aussendung von dienlichen Informationen und Methodiken sein. Wenn genügend Menschen in diesem Modus agieren, so entsteht ein Netz aus selbstständigen Entitäten, welche sich gegenseitig halten. Im Extremfall entstehen durch Aggregatoren komplett selbstständige und souveräne Gesellschaften.

Heutzutage ist es besonders wichtig, sich gedanklich von Eggregoren umzuschalten auf Aggregatoren. Das bedeutet, jeder sollte souverän für sich einen Pol schaffen und Informationen zur Verfügung stellen. Dafür sollte man die anderen Aggregatoren nicht fertig machen. Stattdessen hilft hierbei das in diesem Abschnitt erläuterte Vereinigungsprinzip auf Armeslänge. Anstatt den Gegenüber zu kritisieren oder diffarmieren, wäre hier beispielsweise die konstruktive Kritik geeignet. Es wäre auch ratsam, das in Fragen zu verpacken, was ein nützliches Instrument zur Schaffung des nötigen Abstandes ist.

Weiterführende Fragen

1. Führe für eine weitere logische Verknüpfung eine wie oben durchgeführte komplette Analyse durch. Entscheide dich, um was für eine Art von Beziehungstyp es sich handelt.

2. Zeige mithilfe der Wahrheitstabelle die im Text genannte Äquivalenz der Aussagen A impliziert B ($A \Rightarrow B$) und Nicht A oder B ($\bar{A} \vee B$). Nutze dafür eine Wertetabelle, in der du beide Aussagen für alle Aussagenkombinationen von A und B durchgehst und die Ergebnisse miteinander vergleichst. Falls beides die selbe Aussage ergibt, so ergeben sie für jede dieser Kombinationen die selbe Aussage "wahr" oder "falsch".
3. Zeige mithilfe der Wahrheitstabelle dass die logische Verknüpfung "Äquivalenz" zwischen A und B ($A \Leftrightarrow B$) logisch genau dem Schnitt beider Implikationen entspricht ($(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$) entspricht. Nutze dafür eine Wertetabelle, in der du beide Aussagen für alle Aussagenkombinationen von A und B durchgehst und die Ergebnisse miteinander vergleichst. Falls beides die selbe Aussage ergibt, so ergeben sie für jede dieser Kombinationen die selbe Aussage "wahr" oder "falsch".
4. Wie lauten die Venn-Diagramme für die (einseitige) Differenz und den Nicht-Operator?
5. Gibt es auch Zwischenstufen zwischen dem Schnitt und der Vereinigung? Wie könnte man das quantifizieren?
6. Kannst du dieses Modell auch auf mehr als zwei verschiedene Parteien übertragen? Welche wesentlichen Typen lassen sich daraus ableiten?